ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

SESSION Mai 1991

Epreuve Commune

de MATHEMATIQUES

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT
DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION
DE L'AVIATION CIVILE
C.F. et C.T.

Durée : 3 h 00

Coef. : 1

AVIS AUX CANDIDATS

Il est demandé d'indiquer clairement le repère de la question traitée. Il est permis d'admettre des résultats précédents qu'on n'aurait pas établis pour traiter une question.

Le barème de la correction tiendra compte du choix des méthodes utilisées, de la façon dont elles sont exposées et de la justification des calculs.

La partie V du problème peut être traitée indépendamment des autres parties.

PROBLEME
- Partie I -

x est un réel dans l'un des intervalles :

$$I_1 =]-\infty, -1[\quad ; \quad I_2 =]-1, +1[\quad ; \quad I_3 =]+1, +\infty[.$$

y : x → y (x) est une fonction à valeur réelle dont les dérivées première et seconde continues sont désignées respectivement par y' et y".

On considère l'équation différentielle

E(x) : $(x^2 - 1)\, y'' + 3xy' - 8y = 0.$

I.1 – y étant solution de E(x) sur I_2, on effectue le changement, à la fois de variable et de fonction inconnue, défini par :

$$\theta : x \to \theta(x) = \text{Arc cos } x,$$

$$h : x \to h(x) = y(x) \sin(\text{Arc cos } x) ;$$

on définit ainsi la fonction : $z : \theta \to z(\theta) = h[x(\theta)]$.

Déduire de E(x) une équation différentielle $E_z(\theta)$ que vérifie z.

A SUIVRE

I.2 - Déterminer la solution générale de $E_z(\theta)$ et en déduire la solution générale de E(x) sur I_2.

I.3 -

a) Déterminer les solutions particulières y_1 et y_2 de E(x) sur I_2 vérifiant respectivement les conditions C_1 et C_2 :

C_1 : $y_1(0) = -1$ $\qquad$ $y_1'(0) = 0$;

C_2 : $y_2(0) = 0$ $\qquad$ $y_2'(0) = -3$.

b) Montrer que les solutions y de E(x) sur I_2 forment un espace vectoriel dont donnera une base.

I.4 - Déterminer la solution générale de E(x) :

a) sur I_3 ;

b) sur I_1.

I.5 - Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de E(x) sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

- Partie II -

On désigne par S l'espace vectoriel réel des suites $s = (a_o, a_1, \ldots, a_n \ldots)$ de réels muni des lois usuelles de la multiplication d'une suite par un réel et de l'addition de deux suites.

II.1 - On suppose qu'il existe un intervalle ouvert non vide J, inclus dans I_2, et une suite s telle que la série entière de terme général $a_n x^n$ soit convergente dans J et que la fonction définie sur J par :

$$y : x \to y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

soit solution de E(x) sur J.

Sous ces hypothèses, déterminer les conditions que les termes de s vérifient nécessairement.

Tournez la page S.V.P.

II.2 - Montrer que l'ensemble des suites s satisfaisant les hypothèses définies au **II.1.** est un sous-espace vectoriel de S dont on précisera la dimension et une base.

II.3 - Etudier le rayon de convergence des séries entières associées aux suites s satisfaisant les hypothèses définies au **II.1.**

II.4 -

a) Déterminer le développement en série entière de la fonction y_2 définie au **I.3.a)** et donner son rayon de convergence.

b) En déduire que la série numérique de terme général u_p défini pour $p \geq 2$ par :

$$u_p = \frac{2p+3}{2^{3p+1}} \cdot \frac{1.\ 3.\ 5.\ \ldots\ (2p-3)}{p!}$$

est convergente et calculer sa somme dont on vérifiera qu'elle est bien positive.

- Partie III -

III.1 - Démontrer que y, solution de E(x) sur I_2, admet sur cet intervalle des dérivées continues $y^{(n)}$ de tout ordre.

III.2 - Etablir que, pour tout x de I_2 et pour tout entier $n \geq 0$, les dérivées successives de y vérifient sur cet intervalle une relation de la forme :

$$A_n(x)\, y^{(n+2)}(x) + B_n(x)\, y^{(n+1)}(x) + C_n\, y^{(n)}(x) = 0$$

dont on explicitera les coefficients $A_n(x)$ et $B_n(x)$, dépendants de x, ainsi que le coefficient C_n.

III.3 - retrouver alors les résultats établis aux questions **II.1. et II.2.**.

- Partie IV -

Dans cette partie y est solution de E(x) sur $K = \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$.

IV.1 - Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$\frac{28x^3 - 19x}{(4x^2-1)(1-x^2)}$$

A SUIVRE

IV.2 -

a) Ecrire une équation différentielle $E_v(x)$ déduite de E(x) par le changement de fonction inconnue :

$$v : x \to v(x) = \frac{y(x)}{4x^2 - 1}$$

b) Pour x dans K, on définit la fonction f par :

$$f : x \to f(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1 - 4t^2)^2 (1 - t^2)^{3/2}}$$

Donner l'expression de la solution générale de E(x) sur K en fonction de f et de deux constantes arbitraires.

c) Comparer cette expression à celle de la fonction y_2 définie au **I.3.a)** puis expliciter f(x) à l'aide des valeurs de fonctions élémentaires de x.

- Partie V -

Le plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}\vec{j})$ d'axes Ox, Oy. On considère la courbe Γ décrite dans P par le point A(t) défini par :

$$\vec{OA}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

$$x(t) = 4t^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{4t^3 - 3t}{\sqrt{1 - t^2}}$$

avec t dans L =] - 1, + 1 [.

V.1 - Construire Γ en précisant : les branches infinies, le point double, les points sur les axes et les tangentes correspondantes.

V.2 - Déterminer l'équation cartésienne de Γ et calculer l'aire limitée par sa boucle.

FIN